Vorlesung 12 a

Eine Klausur aus 2019/20

Bei den Aufgaben 1, 3, 5 und 6 können je 16 Punkte erreicht werden, bei den Aufgaben 2 und 4 können jeweils 18 Punkte erreicht werden.

Bitte geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse.

1. a) Ein Land bestehe aus zwei Provinzen A und B, in der Provinz A leben 9mal so viele Menschen wie in der Provinz B. 70% der Bewohner der Provinz A leben in Großstädten, und 20% der Bewohner von Provinz B leben in Großstädten.

Wieviel Prozent der Großstadtbewohner des Landes leben in der Provinz A?

$X \backslash Y$		1	0
		A	B
1	G	63	2
0	G^c	27	8
		90	10

(in %)

$0.96..$

$\frac{63}{65} = 0.96$

$63 = 90 \cdot 0.7$

b) In der in a) beschriebenen Situation sei
J ein rein zufällig gewählter Bewohner des Landes,
X der Indikator des Ereignisses $\{J \text{ lebt in einer Großstadt}\}$
und Y der Indikator des Ereignisses $\{J \text{ lebt in der Provinz } A\}$.

Finden Sie die Übergangsmatrix im zweistufigen Experiment mit X als erster und Y als zweiter Stufe.

$$\begin{array}{c|c|c} X \backslash Y & 1 & 0 \\ \hline 1 & 63/65 & 2/65 \\ \hline 0 & 27/35 & 8/35 \end{array}$$

2. a) Y sei exponentialverteilt zum Parameter α.

(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Y \geq 4\}$?

(ii) Für welches α ist der Median der Verteilung von Y gleich 4?

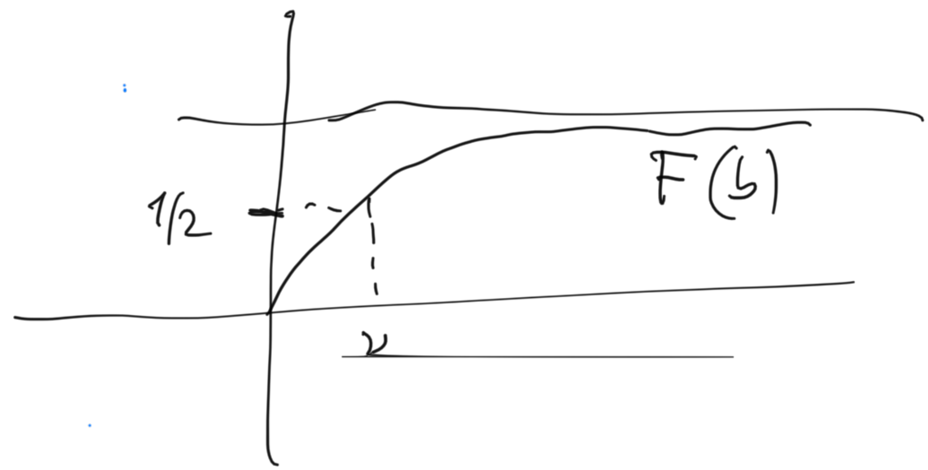
i) $\mathbb{P}(Y \geq 4) = e^{-\alpha 4}$

ii) $\boxed{\mathbb{P}(Y \geq \nu) \overset{!}{=} \frac{1}{2}}$

$$\boxed{e^{-\alpha \nu} \overset{!}{=} \frac{1}{2}}$$

$$-\alpha \nu = \ln \frac{1}{2}$$

$$\nu = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\alpha} = \frac{-\ln 2}{-\alpha} = \frac{\ln 2}{\alpha}$$



$$4 \overset{!}{=} \frac{\ln 2}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{4}$$

b) X sei eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit Dichte $2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}\,da$, $a \geq 0$. Berechnen Sie

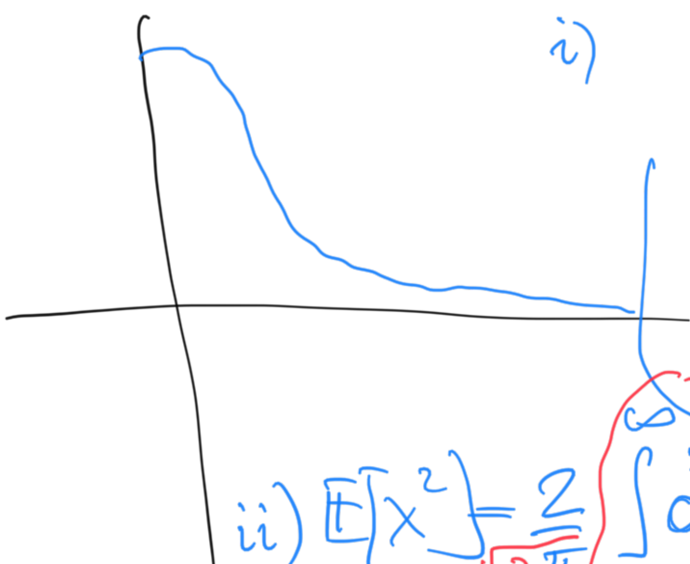
(i) den Erwartungswert

(ii) die Varianz

von X.

Hinweis zu (i): Was ist die Ableitung von $a \mapsto e^{-a^2/2}$?

Hinweis zu (ii): Hier dürfen Sie verwenden, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da$ die Varianz einer standard normalverteilten Zufallsvariablen ist - und die kennen Sie doch! $= 1$



i) $$\int_0^\infty a \cdot 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^\infty a\, e^{-a^2/2}\,da}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \qquad = -\frac{d}{da} e^{-\frac{a^2}{2}}\Big|_0^\infty = 1$$

ii) $$E[X^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}\,da$$
$= 1$

$$\boxed{Var[X] = E[X^2] - E[X]^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^\infty a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}\,da = 1/2$$

c) Z sei standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}$. Finden Sie die Dichte von $|Z|$. (Eine kurze Begründung genügt.)

Sei $b \geq 0$.

$$\mathbb{P}[|Z| \leq b] = \mathbb{P}[-b \leq Z \leq b]$$

$$0.68 \overset{!}{=} \int_{-b}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{a^2}{2}} da$$

$$\frac{d}{db} \mathbb{P}[|Z| \leq b] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}}, \quad b \geq 0$$

Dichte: $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} da, \quad a \geq 0$

d) X sei wie in Teil b).

Geben Sie eine positive Zahl b an mit $\mathbf{P}(X \leq b) \approx 0.68$.

(Auch hier genügt eine kurze Begründung.)

$b = 1$, siehe Teil c)

3. a) Aus einer (als unendlich groß gedachten) Population $\mathcal{P}$, in der jedes Individuum entweder von Typ A oder vom Typ B ist, werden 100 Individuen rein zufällig gewählt. Davon haben 40 den Typ A und 60 den Typ B. Geben Sie eine auf diesen Daten basierende Realisierung eines approximativen 95%-Konfidenzintervalles für den Anteil p der Typ-A Intervalle in der Population an.

$n = 100, \quad k = 40, \quad p \approx \hat{p} = \frac{40}{100}$

$$\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)}$$

$$\hat{\sigma}_H = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$\hat{p}$

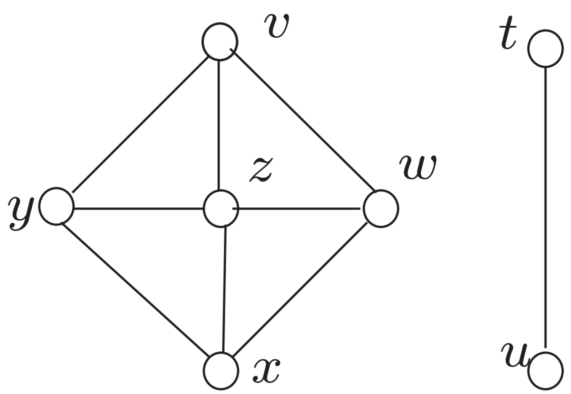
$$I = [\hat{p} \pm 2\hat{\sigma}_H]$$

b) Wie ist das Ergebnis aus a) zu modifizieren, wenn $\mathcal{P}$ eine aus insgesamt (nur) $g = 200$ Individuen bestehende Population ist (und die Stichprobengröße nach wie vor 100 beträgt)?

$$g = 200$$

$$\sigma_H^{\text{~~endl~~. Pop.}} = \sigma_H^{\infty\,\text{pop}} \cdot \sqrt{\frac{g-n}{g-1}}$$

4.



Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt X auf der Knotenmenge $S = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ des links abgebildeten *nicht zusammenhängenden*, ungerichteten Graphen G: von jedem Zustand $a \in S$ geht man im nächsten Schritt zu einem rein zufällig gewählten Nachbarn von a.

Wir erinnern, dass eine Verteilung π auf S eine *reversible Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix* P heißt, wenn gilt:

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a) \quad \text{für alle } a, b \in S.$$

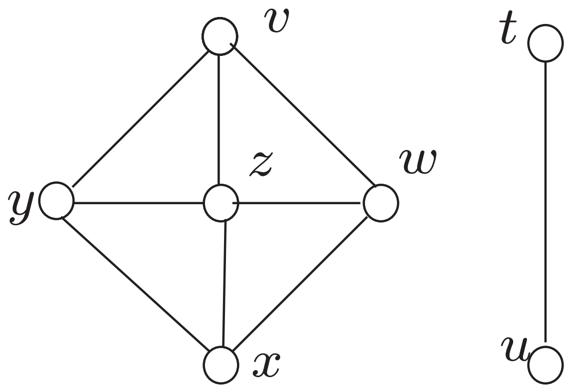
a) Begründen Sie, warum die Verteilung π mit den Gewichten

$\pi(t) = \pi(u) = 1/2,$

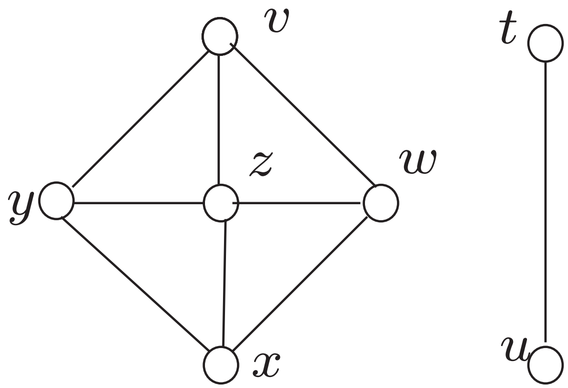
$\pi(v) = \pi(w) = \pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = 0,$ eine reversible Gleichgewichtsverteilung der gewöhnlichen Irrfahrt auf G ist.

$P(t,u) = P(u,t) = 1$, $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1$ also ist (R) erfüllt

$0 \cdot \text{irgendwas} = 0 \cdot \text{irgendwas}$



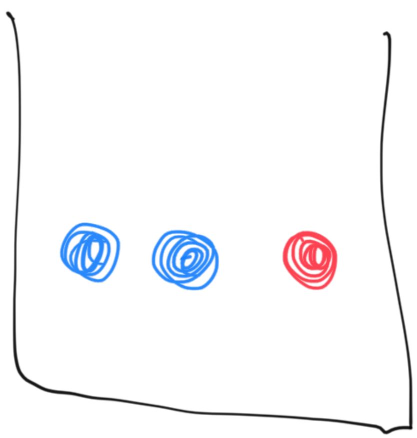
b) Geben Sie noch mindestens zwei weitere Gleichgewichtsverteilungen der gewöhnlichen Irrfahrt auf G an.



c) Für $a \in S$ sei T_a die erste Treffzeit von a. Berechnen Sie $\mathbf{E}_y[T_z]$.

5. Wir betrachten die Farbfolge der Züge aus einer Pólya-Urne, in der sich anfänglich zwei blaue und eine rote Kugel befinden. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Zug eine rote Kugel gezogen wird, gleich 1/3.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei den ersten vier Zügen jeweils nur rote Kugeln gezogen werden.



(i) $\frac{1}{\cancel{3}} \frac{2}{\cancel{4}} \frac{\cancel{3}}{5} \frac{\cancel{4}}{6} = \frac{2}{5 \cdot 6}$

(ii) Was ist (für $n \in \mathbb{N}$) die Wahrscheinlichkeit, dass bei den ersten n Zügen jeweils nur rote Kugeln gezogen werden?

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

(iii) Es sei T die Nummer des Zuges, zu dem erstmals eine blaue Kugel gezogen wird. Bestimmen Sie $\mathbf{P}(T > n)$.

$$\mathbb{P}(T>n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \mathbb{P}(\text{alles rot bis einschließl. } n\text{-ter Zug})$$

(iv) Wir haben in der Vorlesung bewiesen, dass $\mathbf{E}[T] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(T > n)$. Berechnen Sie damit den Erwartungswert von T. Hilfreich dabei ist die Gleichheit $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 2 \sum_{n \geq 0}$$

6. 20 mit $i = 1, 2, \ldots, 20$ nummerierte Plätze werden ohne Mehrfachbelegung in rein zufälliger Ordnung mit 20 Objekten besetzt. 8 dieser Objekte haben den Typ A, 7 Objekte den Typ B und 5 Objekte den Typ C.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Platz 1 und 2 mit zwei Objekten von Typ A besetzt?

$$\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19}$$

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Platz 1 und 2 mit zwei Objekten desselben Typs besetzt?

$$\frac{8}{20}\,\frac{7}{19} + \frac{7\;6}{20\;19} + \frac{5\;4}{20\;19}$$

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert

(i) der Anzahl von Paaren aufeinanderfolgender Plätze $(i, i+1)$, $i = 1, \ldots, 19$, die mit Objekten desselben Typs besetzt sind,

5.9

(ii) der Anzahl von Paaren aufeinanderfolgender Plätze $(i, i+1)$, $i = 1, \ldots, 19$, die mit Objekten unterschiedlichen Typs besetzt sind.

$19 - 5.9$ (wegen Additivität des EW)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{19} I_{\{(i,\, i+1) \text{ sind von selben Typ besetzt}\}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{19} \mathbb{E}\left[\quad = \quad\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{19} \mathbb{P}\left((i,\, i+1) \text{ — " — }\right) = \text{siehe b)}$$

$= 19$ mal Ergebnis aus b)